УДК 539.37+539.214

Чигиринский В. В.
Путноки А. Ю.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СМЕЖНЫХ КЛЕТЕЙ ПРОКАТНОГО СТАНА

В период захвата металла валками возникают крутильные колебания главной линии стана. Колебания привода механической системы клети создают первоначальный импульс для полосы, находящейся между валками рабочей клети. Процессы взаимодействия в упругой полосе передают нагружение к смежной клети, главная линия которой в период захвата металла, со своей динамикой, воспринимает колебания системы предыдущей клети.

Импульсное продольное нагружение приводит к динамическим процессам в полосе, которые оказывают воздействие на последующую клеть и ее динамические характеристики в процессе прокатки. Динамическое взаимодействие между смежными клетями стана рассматривается, как волновой процесс в упругой полосе, соединяющей клети.

Волновое уравнение для пространственной задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (1)$$

Ранее в работах [1–4], получены решения волнового уравнения. Воспользуемся для решения пространственной динамической задачи произведениями тригонометрических функций, аргументы которых представляются плоскими функциями, зависящими от времени и координаты. Решение ищем в виде:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 .$$

При этом

$$u_1 = C_1 cos \mathrm{A}_1\Phi_1 cos\theta_1,\ u_1 = C_2 cos \mathrm{A}_2\Phi_2 cos\theta_2,\ \ u_1 = C_3 cos \mathrm{A}_3\Phi_3 cos\theta_3 . \qquad (2)$$

Функции

$$A_1\varPhi_1 = f_1(x,t),\ \theta_1 = f_2(x,t),\ A_2\varPhi_2 = f_3(y,t),\ \theta_2 = f_4(y,t),$$
$$A_3\varPhi_3 = f_5(z,t),\ \theta_3 = f_6(z,t),$$

Возьмем производные с учетом (2):

$$\frac{\partial^2(u_1+u_2+u_3)}{\partial x^2} =$$
$$= -C_1(\mathrm{A}_1\Phi_1)_{xx}\sin \mathrm{A}_1\Phi_1 cos\theta_1 - C_1(\mathrm{A}_1\Phi_1)_x^2\cos \mathrm{A}_1\Phi_1\cos\theta_1 +$$
$$+C_1(\mathrm{A}_1\Phi_1)_x(\theta_1)_x\sin \mathrm{A}_1\Phi_1\sin\theta_1 - \qquad (3)$$
$$-C_1(\theta_1)_{xx} Cos A_1\varPhi_1 Sin\theta_1 + C_1(\theta_1)_x(A_1\varPhi_1)_x Sin A_1\varPhi_1 Sin\theta_1 - C_1(\theta_1)_x^2 Cos A_1\varPhi_1 Cos\theta_1 .$$

$$\frac{\partial^2(u_1+u_2+u_3)}{\partial y^2} =$$
$$= -C_2(\mathrm{A}_2\Phi_2)_{yy}\sin \mathrm{A}_2\Phi_2\cos\theta_2 - C_2(\mathrm{A}_2\Phi_2)_y^2\cos \mathrm{A}_2\Phi_2\cos\theta_2 +$$
$$+C_2(\mathrm{A}_2\Phi_2)_y(\theta_2)_y\sin \mathrm{A}_2\Phi_2\sin\theta_2 - \qquad (4)$$
$$-C_2(\theta_2)_{yy}\cos \mathrm{A}_2\Phi_2\sin\theta_2 + C_2(\theta_2)_y(\mathrm{A}_2\Phi_2)_y\sin \mathrm{A}_2\Phi_2\sin\theta_2 -$$
$$-C_2(\theta_2)_y^2\cos \mathrm{A}_2\Phi_2\cos\theta_2 .$$

$$\frac{\partial^2(u_1+u_2+u_3)}{\partial z^2} = -C_3(A_3\Phi_3)_{zz}\sin A_3\Phi_3\cos\theta_3 - C_3(A_3\Phi_3)_z^2\cos A_3\Phi_3\cos\theta_3 +$$
$$+C_3(A_3\Phi_3)_z(\theta_3)_z\sin A_3\Phi_3\sin\theta_3 -$$
$$-C_3(\theta_3)_{zz}\cos A_3\Phi_3\sin\theta_3 + C_3(\theta_3)_z(A_3\Phi_3)_z\sin A_3\Phi_3\sin\theta_3 -$$
$$-C_3(\theta_3)_z^2\cos A_3\Phi_3\cos\theta_3 \quad (5)$$

Далее

$$\frac{\partial^2(u_1+u_2+u_3)}{\partial t^2} =$$
$$= -C_1(A_1\Phi_1)_{tt}\sin A_1\Phi_1\cos\theta_1 - C_1(A_1\Phi_1)_t^2\cos A_1\Phi_1\cos\theta_1 +$$
$$-C_1(\theta_1)_{tt}\cos A_1\Phi_1\sin\theta + C_1(\theta_1)_t(A_1\Phi_1)_t\sin A_1\Phi_1\sin\theta -$$
$$-C_2(A_2\Phi_2)_{tt}SinA_2\Phi_2Cos\theta_2 - C_2(A_2\Phi_2)_t^2CosA_2\Phi_2Cos\theta_2 +$$
$$-C_2(\theta_2)_{tt}\cos A_2\Phi_2\sin\theta_2 + C_2(\theta_2)_t(A_2\Phi_2)_t\sin A_2\Phi_2\sin\theta_2 -$$
$$-C_3(A_3\Phi_3)_{tt}\sin A_3\Phi_3\cos\theta_3 - C_3(A_3\Phi_3)_t^2\cos A_3\Phi_3\cos\theta_3 +$$
$$+C_3(A_3\Phi_3)_t(\theta_3)_t\sin A_3\Phi_3\sin\theta_3$$
$$-C_3(\theta_3)_{tt}\cos A_3\Phi_3\sin\theta_3 + C_3(\theta_3)_t(A_3\Phi_3)_t\sin A_3\Phi_3\sin\theta_3 -$$
$$-C_3(\theta_3)_t^2\cos A_3\Phi_3\cos\theta_3. \quad (6)$$

Подставляя (3)–(6) в уравнение (1), после несложных преобразований, группируя возле тригонометрических функций, получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, второго порядка, с возможной повторяющейся схемой упрощения

$$-C_1\Big\{\big[(A_1\Phi_1)_{tt} - c^2(A_1\Phi_1)_{xx}\big]\sin A_1\Phi_1\cos\theta_1 -$$
$$-\Big[\big((A_1\Phi_1)_t^2 - c^2(\theta_1)_x^2\big) + (\theta_1)_t^2 - c^2(A_1\Phi_1)_x^2\Big]\cos A_1\Phi_1\cos\theta_1 +$$
$$+2\big[(A_1\Phi_1)_t(\theta_1)_t - c^2(A_1\Phi_1)_x(\theta_1)_x\big]\sin A_1\Phi_1\sin\theta_1 - \big[(\theta_1)_{tt} - c^2(\theta_1)_{xx}\big]\cos A_1\Phi_1\sin\theta_1\Big\} -$$
$$-C_2\Big\{\big[(A_2\Phi_2)_{tt} - c^2(A_2\Phi_2)_{yy}\big]\sin A_2\Phi_2\cos\theta_2 -$$
$$-\Big[\big((A_2\Phi_2)_t^2 - c^2(\theta_{21})_y^2\big) + (\theta_2)_t^2 - c^2(A_2\Phi_2)_y^2\Big]\cos A_2\Phi_2\cos\theta_2 +$$
$$+2\big[(A_2\Phi_2)_t(\theta_2)_t - c^2(A_2\Phi_2)_y(\theta_2)_y\big]\sin A_2\Phi_2\sin\theta_2 - \big[(\theta_2)_{tt} - c^2(\theta_2)_{yy}\big]\cos A_2\Phi_2\sin\theta_2\Big\}$$
$$-C_3\Big\{\big[(A_3\Phi_3)_{tt} - c^2(A_3\Phi_3)_{zz}\big]\sin A_3\Phi_3\cos\theta_3 -$$
$$-\Big[\big((A_3\Phi_3)_t^2 - c^2(\theta_3)_x^2\big) + (\theta_3)_t^2 - c^2(A_3\Phi_3)_x^2\Big]\cos A_3\Phi_3\cos\theta_3 +$$
$$+2\big[(A_3\Phi_3)_t(\theta_3)_t - c^2(A_3\Phi_3)_x(\theta_3)_x\big]\sin A_3\Phi_3\sin\theta_3 - \big[(\theta_3)_{tt} - c^2(\theta_3)_{xx}\big]\cos A_3\Phi_3\sin\theta_3\Big\} = 0 \quad (7)$$

Избавляясь от нелинейности, получим варианты решений с разными знаками

$$1.\ (A_1\Phi_1)_t = c(\theta_1)_x,\ (\theta_1)_t = c(A_1\Phi_1)_x,$$
$$(A_2\Phi_2)_t = c(\theta_2)_y,\ (\theta_2)_t = c(A_2\Phi_2)_y,\ (A_3\Phi_3)_t = c(\theta_3)_z,\ (\theta_3)_t = c(A_3\Phi_3)_z. \quad (8)$$
$$2.\ (A_1\Phi_1)_t = -c(\theta_1)_x,\ (\theta_1)_t = -c(A_1\Phi_1)_x,$$
$$(A_2\Phi_2)_t = -c(\theta_2)_y,\ (\theta_2)_t = -c(A_2\Phi_2)_y,\ (A_3\Phi_3)_t = -c(\theta_3)_z,\ (\theta_3)_t = -c(A_3\Phi_3)_z. \quad (9)$$

После упрощений, избавляясь от скобок выражение (7) запишется

$$
\begin{gathered}
-C_1\left\{\left[(\mathrm{A}_1\Phi_1)_{tt}-c^2(\mathrm{A}_1\Phi_1)_{xx}\right]\sin \mathrm{A}_1\Phi_1\cos\theta_1-\right.\\
\left.-\left[(\theta_1)_{tt}-c^2(\theta_1)_{xx}\right]\cos \mathrm{A}_1\Phi_1\sin\theta_1\right\}-\\
-C_2\left\{\left[(\mathrm{A}_2\Phi_2)_{tt}-c^2(\mathrm{A}_2\Phi_2)_{yy}\right]\sin \mathrm{A}_2\Phi_2\cos\theta_2-\right.\\
\left.-\left[(\theta_2)_{tt}-c^2(\theta_2)_{yy}\right]\cos \mathrm{A}_2\Phi_2\sin\theta_2\right\}-\\
-C_3\left\{\left[(\mathrm{A}_3\Phi_3)_{tt}-c^2(\mathrm{A}_3\Phi_3)_{zz}\right]\sin \mathrm{A}_3\Phi_3\cos\theta_3-\left[(\theta_3)_{tt}-c^2(\theta_3)_{xx}\right]\cos \mathrm{A}_3\Phi_3\sin\theta_3\right\}=0
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Из (8) и (9) определяются вторые производные уравнения (10),по вариантам

$$
\begin{gathered}
1.\ (A_1\Phi_1)_{tt}=c(\theta_1)_{xt},\ (\theta_1)_{tt}=c(A_1\Phi_1)_{xt},\\
(A_1\Phi_1)_{tx}=c(\theta_1)_{xx},\ (\theta_1)_{tx}=c(A_1\Phi_1)_{xx},\\
(A_2\Phi_2)_{tt}=c(\theta_2)_{yt},\ (\theta_2)_{tt}=c(A_2\Phi_2)_{yt},\\
(A_2\Phi_2)_{ty}=c(\theta_2)_{yy},\ (\theta_2)_{ty}=c(A_2\Phi_2)_{yy},\\
(A_3\Phi_3)_{tt}=c(\theta_3)_{zt},\ (\theta_3)_{tt}=c(A_3\Phi_3)_{zt},\\
(A_3\Phi_3)_{tz}=c(\theta_3)_{zz},\ (\theta_3)_{tz}=c(A_3\Phi_3)_{zz},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
2.\ (A_1\Phi_1)_{tt}=-c(\theta_1)_{xt},\ (\theta_1)_{tt}=-c(A_1\Phi_1)_{xt},\\
(A_1\Phi_1)_{tx}=-c(\theta_1)_{xx},\ (\theta_1)_{tx}=-c(A_1\Phi_1)_{xx},\\
(A_2\Phi_2)_{tt}=-c(\theta_2)_{yt},\ (\theta_2)_{tt}=-c(A_2\Phi_2)_{yt},\\
(A_2\Phi_2)_{ty}=-c(\theta_2)_{yy},\ (\theta_2)_{ty}=-c(A_2\Phi_2)_{yy},\\
(A_3\Phi_3)_{tt}=-c(\theta_3)_{zt},\ (\theta_3)_{tt}=-c(A_3\Phi_3)_{zt},\\
(A_3\Phi_3)_{tz}=-c(\theta_3)_{zz},\ (\theta_3)_{tz}=-c(A_3\Phi_3)_{zz}
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Вычитая вторые производные, имеем дифференциальные соотношения:

$$
\begin{gathered}
(A_i\Phi_i)_{tt}-c^2(A_i\Phi_i)_{jj}=0,\\
(\theta_i)_{tt}-c^2(\theta_i)_{jj}=0.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Используя соотношения (11),(12) определяемся уравнением для определения функций $A_i\Phi_i$ и θ_i,(13), где $i=1,2,3;\ j=x,y,z$.

Решение дифференциального уравнения в частных производных (1) представляется в виде:

$$
u=C_1 cos\mathrm{A}_1\Phi_1 cos\theta_1+C_2 cos\mathrm{A}_2\Phi_2 cos\theta_2+C_3 cos\mathrm{A}_3\Phi_3 cos\theta_3,
\tag{14}
$$

Выражение (14) будет иметь силу и при разных сочетаниях тригонометрических функций

$$
\begin{gathered}
u=C_1'\cdot(C_1 Sin\theta_1+C_2 Cos\theta_1)\cdot(C_3 Sin A_1\Phi_1+C_4 Cos A_1\Phi_1)+\\
+C_2'\cdot(C_5\sin\theta_2+C_6\cos\theta_2)\cdot(C_7\sin \mathrm{A}_2\Phi_2+C_8\cos \mathrm{A}_2\Phi_2)+\\
+C_3'\cdot(C_9\sin\theta_3+C_{10}\cos\theta_3)\cdot(C_{11}\sin \mathrm{A}_3\Phi_3+C_{12}\cos \mathrm{A}_3\Phi_3),
\end{gathered}
\tag{15}
$$

$$
\begin{gathered}
(A_i\Phi_i)_t=\pm c(\theta_i)_j,\ (\theta_i)_t=\pm c(A_i\Phi_i)_j,\\
(A_i\Phi_i)_{tt}-c^2(A_i\Phi_i)_{jj}=0,\\
(\theta_i)_{tt}-c^2(\theta_i)_{jj}=0.
\end{gathered}
$$

Результат (15) можно привести к уже известным решениям, которые изложены в работе [3]. Используя метод разделения переменных, получено выражение u_n:

$$
u_n=\left(\mathrm{A}_n cos\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot at+B_n\sin\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot at\right)\cdot\sin\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot x.
\tag{16}
$$

Установим соответствие коэффициентов в решениях (8) и (10), и определим соотношения между функциями. Очевидно

$$C_2 = \mathrm{B}_n,\quad C_1 = \mathrm{A}_n,\quad \theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at,\ \mathrm{A\Phi} = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x,\ C_3 = 1,\ C_4 = 0,\ C_2^{'} = C_3^{'} = 0.$$

Тогда, с учетом упрощений, имеем:

$$u_n = \left(\mathrm{A}_n \cos\theta + B_n \sin\theta\right) \cdot \sin \mathrm{A\Phi}.$$

Покажем, что между функциями выражения (16), существуют соотношения вида (8), (9). Действительно:

$$\theta_t = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a,\ \ \mathrm{A\Phi}_x = \frac{\pi \cdot n}{l},\ \ \mathrm{A\Phi}_t = 0,\ \theta_x = 0.$$

Подставляя в соотношения $\theta_t = \mp a \mathrm{A\Phi}_x$, $\mathrm{A\Phi}_t = \mp a\theta_x$, убеждаемся, что они удовлетворены, имеют вид:

$$\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a = a \cdot \frac{\pi \cdot n}{l},\ \ 0 = a \cdot 0.$$

Функции $\theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at$ и $A\Phi = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x$ удовлетворяют гиперболическим дифференциальным уравнениям (13):

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0;\ \ A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0.$$

Следует подчеркнуть, что в соотношениях (8), (9) и (13) определяется вид не самих функций, а условия их существования. В предлагаемой постановке и решении появляется возможность расширения круга рассматриваемых задач, за счет усложнения и разнообразия граничных, начальных условий.

ВЫВОДЫ

1. В периоды неустановившегося движения полосы в очаге деформации при прокатке, возникают динамические нагрузки, взаимно влияющие на колебания главных линий смежных клетей стана.

2. Динамическое взаимодействие между смежными клетями стана рассматривается, как волновой процесс в упругой полосе, соединяющей эти клети.

3. Поставлена и решена пространственная динамическая задача теории упругости в аналитическом виде.

3. Определены условия существования функций, определяющие предложенные решения.

4. Рассмотрено известное частные решения линейной задачи, показано соответствие предлагаемому пространственному решению динамической задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.*
2. *Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 724 с.*
3. *Бабанов И. М. Теория колебаний / И. М. Бабанов. – М. : Наука, 1968. – 560 с.*
4. *Бронштейн И. М. Справочник по математике / И. М. Бронштейн, К. Л. Семендяев. – М. : Наука, 1964. – 608 с.*

REFERENCES

1. *Panovko Ja. G. Osnovy prikladnoj teorii uprugih kolebanij i udara / Ja. G. Panovko. – L. : Mashinostroenie, 1976. – 320 s.*
2. *Tihonov A. N. Uravnenija matematicheskoj fiziki / A. N. Tihonov, A. A. Samarskij. – M. : Nauka, 1966. – 724 s.*
3. *Babanov I. M. Teorija kolebanij / I. M. Babanov. – M. : Nauka, 1968. – 560 s.*
4. *Bronshtejn I. M. Spravochnik po matematike / I. M. Bronshtejn, K. L. Semendjaev. – M. : Nauka, 1964. – 608 s.*

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. ОМД ЗНТУ;

Путноки А. Ю. – канд. техн. наук, докторант ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: valerij@zntu.edu.ua

Статья поступила в редакцию 15.09.2015 г.